

РИСК И ВОЛАТИЛЬНОСТЬ: ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ФИНАНСОВАЯ ПРАКТИКА *

Роберт Энгл**

Резюме

Усиление роли риска и неопределенности в современной экономике потребовало развития новых эконометрических методов анализа временных рядов, которые при моделировании учитывали бы изменение дисперсий и ковариаций во времени. В этом отношении особенно полезным оказался класс авторегрессионных моделей с условной гетероскедастичностью (ARCH), предложенный Робертом Энглом. Ключевым аспектом моделей ARCH является проведение различия между условными и безусловными моментами второго порядка. В то время как для представляющих интерес переменных безусловная матрица ковариаций может быть неизменной во времени, условные дисперсии и ковариации часто нетривиальным образом зависят от ситуации в прошлом. Понимание точного характера этой временной зависимости крайне важно для многих проблем в макроэкономике и финансах, таких как безвозвратные инвестиции, ценообразование на опционы и временная структура процентных ставок. Кроме того, с точки зрения получения эконометрических выводов потеря в асимптотической эффективности вследствие неучета гетероскедастичности может быть весьма большой, и при составлении экономических прогнозов, как правило, можно использовать намного более точную оценку неопределенности ошибки прогноза, если получать ее как условную по текущему информационному множеству.

Классификация JEL: C22, C32, C5

Ключевые слова: модель ARCH, обобщение модели ARCH, финансовые активы, риск, доходность, волатильность

1. ВВЕДЕНИЕ

Преимущество осведомленности о рисках заключается в том, что мы можем изменить свое поведение с тем, чтобы их избежать. Безусловно, не-

* Engle, R.F. (2004) Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, *Les Prix Nobel 2003*, 326–349.

© Nobel Foundation, 2003

** Профессор Нью-Йоркского университета (г. Нью-Йорк, США), e-mail: rengle@stern.nyu.edu. Данная статья представляет собой лекцию, прочитанную Робертом Энглом при вручении ему Нобелевской премии в области экономических наук (за разработку методов анализа экономических временных рядов с изменяющейся во времени волатильностью (модели ARCH)) 8 декабря 2003 г. Данная работа явилась результатом исследований, продолжавшихся в течение более двух десятилетий, и сотрудничества со многими и многими людьми. Автор хотел бы особенно поблагодарить аудиторию Банка международных расчетов, Стокгольмского, Уппсальского, Корнельского и Савойского университетов за оценку результатов работы по мере ее прогресса. Подробные предложения были представлены Дэвидом Хендри, Тимом Боллерслевом, Эндрю Паттоном и Робертом Фрестенбергом. Тем не менее все пробелы остаются на совести автора.

сложно показать, что избежать всех рисков невозможно; для этого потребовалось бы не летать самолетами, не водить автомобили, не ходить пешком, есть и пить лишь полезные для здоровья продукты и никогда не принимать солнечные ванны. Даже принятие душа может быть опасным. Я не получил бы данную премию, если бы стремился избежать всех рисков. Существуют некоторые риски, на которые мы идем сознательно, поскольку выгоды от их принятия превышают возможные издержки. Оптимальное поведение строится с учетом разумного риска. Это – центральная парадигма теории финансов; мы должны идти на риск, чтобы получить вознаграждение, однако не все риски получают соответствующее вознаграждение. И риски, и вознаграждение имеют место в будущем, поэтому ожидаемые убытки сопоставляются с ожидаемым вознаграждением. Таким образом, мы оптимизируем поведение, и в частности наш портфель, с тем, чтобы максимизировать вознаграждение и минимизировать риски.

Данная простая концепция имеет долгую историю в экономической теории и при награждении Нобелевской премией. Марковиц и Тобин ассоциировали риск с дисперсией стоимости портфеля (Markowitz (1952); Tobin (1958)). Исходя из стремления избежать риска, они сформулировали оптимальное поведение при формировании портфеля, а также в банковской сфере. Шарп разработал теорию, предполагающую, что все инвесторы преследуют одинаковые цели на основе одной и той же информации (Sharpe (1964)). Данная теория называется моделью ценообразования на основной капитал, или моделью CAPM, и показывает, что существует естественная взаимосвязь между ожидаемой доходностью и дисперсией. Указанные достижения отмечены вручением Нобелевской премии в 1981 и 1990 гг.

Блэк, Шоулз и Мертон разработали модель оценки ценообразования на опционы (Black, Scholes (1972); Merton (1973)). Несмотря на то что их теория базируется на аргументах, касающихся повторных покупок опционов посредством реализации динамических стратегий торговли, она согласуется также с моделью CAPM. Опционы «пут» дают владельцу право купить актив по некоторой цене в определенный момент в будущем. Таким образом, данные опционы могут рассматриваться как страховка. Покупая подобные опционы «пут», можно полностью элиминировать портфельный риск. Однако сколько стоит данная страховка? Цена защиты зависит от рисков, и эти риски измеряются дисперсией доходности активов. Данное достижение отмечено вручением Нобелевской премии в 1997 г.

Для осуществления данных финансовых стратегий на практике необходимы оценки дисперсий. Для этого обычно использовался квадратный корень из дисперсии, называемый волатильностью. Экономисты сразу же осознали, что волатильность изменяется во времени. Они получали разные ответы применительно к различным периодам времени. При этом широко использовался и продолжает использоваться простой подход, иногда называемый подходом с точки зрения *волатильности прошлых периодов*. При использовании данного подхода волатильность оценивается на осно-

ве выборочного стандартного отклонения доходности в течение краткосрочного временного периода. Но какой период времени следует использовать? Если он слишком продолжительный, то будет не совсем подходящим для сегодняшнего дня, а если слишком маленький, то будет очень зашумленным. Кроме того, оценивать риск необходимо именно исходя из волатильности в будущем периоде, следовательно, необходим прогноз волатильности, а также ее сегодняшний показатель. Это указывает на возможность того, что прогноз средней волатильности на следующую неделю отличается от прогноза на год или десятилетие. Подход с точки зрения волатильности прошлых периодов не обеспечивал решения этих проблем.

На более фундаментальном уровне предположение о постоянстве дисперсии в течение определенного периода, такого как, например, год, заканчивающийся сегодня, или год, заканчивающийся в предшествующий день (при этом значение дисперсии будет другим), является логически противоречивым. Необходима теория динамической волатильности; роль такой теории выполняют модели ARCH и многие дополняющие ее модели, которые мы рассмотрим в данной статье.

В следующем разделе мы рассмотрим генезис модели ARCH, а затем некоторые из ее многочисленных обобщений и подтверждающих обоснованность широко распространенных эмпирических фактов. В последующих разделах будет показано, как можно использовать данную динамическую модель для прогнозирования волатильности и риска в течение длительного периода и каким образом ее можно использовать для оценки стоимости опционов.

2. РОЖДЕНИЕ МОДЕЛИ ARCH

Модель ARCH была разработана во время моего отпуска, который я проводил в Лондонской школе экономики в 1979 г. Этому способствовали совместные обеды в комнате для сотрудников и преподавателей с Дэвидом Хендри, Деннисом Сарганом, Джимом Дарбином и многими ведущими эконометристами. Я пытался найти модель, которая позволила бы оценить обоснованность предположения Милтона Фридмана о том, что непредсказуемость инфляции является основной причиной циклов деловой активности (Friedman (1977)). Фридман выдвинул гипотезу, что уровень инфляции не представляет собой проблему, поскольку неопределенность относительно будущих издержек и цен отталкивает предпринимателей от инвестиций и ведет к рецессии. Это возможно лишь в том случае, если степень неопределенности изменяется во времени, поэтому выяснение этого и стало моей целью. Эконометристы называют подобную ситуацию гетероскедастичностью. В то время я интенсивно работал с фильтром Кальмана и знал, что функцию правдоподобия можно разложить на сумму прогнозных плотностей, или плотностей условного распределения. И, наконец, мой коллега Клив Грэйнджер, с которым я разделяю данную

премию, перед этим разработал тест для билинейных моделей временных рядов исходя из взаимозависимости квадратов остатков во времени. То есть квадраты остатков зачастую автокоррелировали, хотя сами остатки – нет. Применительно к экономическим данным во многих случаях подобная автокорреляция была значительной; я предполагал, что данный тест позволяет выявить нечто большее, чем билинейность, однако не знал что именно.

Решением явилась *авторегрессионная модель с условной гетероскедастичностью*, или модель ARCH, название которой было предложено Дэвидом Хендри. Модель ARCH описывала прогнозную дисперсию на основе текущих наблюдаемых показателей. Вместо кратко- или долгосрочных выборочных стандартных отклонений в рамках модели ARCH было предложено использовать средневзвешенные значения ошибок прежних прогнозов в квадрате, то есть один из типов взвешенной дисперсии. При этом веса указывали на более важное значение последней информации и меньшее значение информации из далекого прошлого. Очевидно, что модель ARCH представляла собой простое обобщение выборочной дисперсии.

Большим достижением явилось то, что веса оценивались на основе данных прошлых периодов, несмотря на невозможность получения точного показателя волатильности. Рассмотрим, как работает данная модель. Прогнозы можно сделать на каждый день или каждый период. Путем изучения этих прогнозов на предмет придания им различных весов находят такой набор весов, который делает прогнозы максимально близкими к дисперсии доходности в следующем периоде. Данная процедура, базирующаяся на методе максимального правдоподобия, обеспечивает систематический подход к оценке оптимальных весов. После определения весов данную динамическую модель изменяющейся во времени волатильности используют для измерения волатильности в любой момент времени и ее прогнозирования на ближайшее или отдаленное будущее. Тест Грэйнджера на билинейность оказался оптимальным для этой цели, или тестом множителей Лагранжа для модели ARCH, и широко используется в настоящее время.

Существует множество преимуществ создания явной динамической модели волатильности. Как было упомянуто выше, оптимальные параметры оцениваются на основе метода максимального правдоподобия. Для проверки данной процедуры используют тесты на адекватность и точность моделей волатильности. Эти параметры используются для одно- и многошаговых прогнозов. Безусловные распределения определяются математическим путем; они, как правило, являются реалистичными. Включение соответствующих переменных в модель позволяет проверить экономические модели, которые используются для выявления причин волатильности. Аналогичным образом, включение дополнительных эндогенных переменных и уравнений позволяет проверить экономические модели, объясняющие последствия волатильности. Ниже приводится несколько примеров.

Коллега Дэвида Хендри Франк Срба написал первую компьютерную программу для модели ARCH. Я использовал данную программу для изучения инфляции в Великобритании с целью проверки предположения Фридмана (Engle (1982)). Несмотря на наличие множества фактов, свидетельствующих об изменении во времени степени неопределенности прогнозов инфляции, это не соответствовало циклу деловой активности в Великобритании. Аналогичные тесты с использованием данных о темпах инфляции в США, представленные в моей работе (Engle (1983)), подтвердили вывод, полученный на основе модели ARCH, но не позволили обнаружить эффект цикла деловой активности. Хотя выбор между риском и доходностью является важной составляющей макроэкономической теории, зачастую трудно обнаружить соответствующие эмпирические факты, поскольку они замаскированы другими преобладающими эффектами и малозаметны по причине использования данных с относительно низкой периодичностью появления. В финансовой сфере эффекты риска/доходности имеют первостепенное значение, а данные, появляющиеся ежедневно или даже несколько раз в день, легко доступны для формирования точных прогнозов волатильности. Поэтому финансы – это та сфера, для которой было разработано огромное множество разнообразных моделей ARCH.

3. ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ARCH

Можно оценить и проверить обобщения модели, заключающиеся в различных схемах придания весов. Очень важное обобщение, сделанное моим выдающимся студентом Тимом Боллерслевом, называется обобщенной авторегрессионной моделью с условной гетероскедастичностью, или моделью GARCH (Bollerslev (1986)), которая в настоящее время наиболее широко используется. По сути, она обобщает исключительно авторегрессионную модель ARCH до модели авторегрессии и скользящего среднего. Предполагается, что веса при квадратах прежних остатков уменьшаются в геометрической прогрессии с темпом, оцениваемым на основе имеющихся данных. Несложно понять интуитивно привлекательную интерпретацию модели GARCH (1, 1). Прогноз дисперсии на основе модели GARCH представляет собой средневзвешенное значение трех различных прогнозов дисперсии. Первый – это постоянная дисперсия, соответствующая среднему значению за долгосрочный период. Второй – это прогноз, сделанный в предыдущий период. Третий – это новая информация, которая была недоступна в период, когда делался предыдущий прогноз. Она может рассматриваться как прогноз дисперсии на основе информации за один период. Веса этих трех прогнозов определяют, насколько быстро меняется дисперсия с появлением новой информации и насколько быстро она возвращается к среднему значению в долгосрочном периоде.

Вторым чрезвычайно важным обобщением стала экспоненциальная модель GARCH, или модель EGARCH, разработанная Дэном Нельсоном

(Nelson (1992)), который преждевременно ушел из жизни в 1995 г., что явилось огромной потерей для эконометрического сообщества, на что указали Боллерслев и Росси (Bollerslev, Rossi (1995)). За свою короткую академическую карьеру он написал ряд чрезвычайно важных работ. Нельсон осознал, что волатильность асимметрично реагирует на ошибки прежних прогнозов. В финансовом контексте отрицательная доходность, по видимому, является более важной прогнозной переменной волатильности, чем положительная доходность. Существенное снижение цен позволяет спрогнозировать более значительную волатильность по сравнению со столь же существенным ростом цен. С экономической точки зрения, это достаточно интересный эффект, имеющий самые разные последствия, которые рассматриваются ниже.

Многие исследователи предложили другие обобщения. В настоящее время существует множество аббревиатур моделей ARCH: AARCH, APARCH, FIGARCH, FIEGARCH, STARCH, SWARCH, GJR-GARCH, TARCH, MARCH, NARCH, SNPARCH, SPARCH, SQGARCH, CESGARCH, компонентная модель ARCH, асимметричная компонентная модель ARCH, модель Тэйлора-Шверта, модель Стьюдента- t -ARCH, GEDARCH и многие другие, которые я, к сожалению, опустил. Обзор многих из этих моделей приведен в работах Bollerslev, Chou, and Kroner (1992), Bollerslev (1994), Engle (2002b) и Engle, Ishida (2002). Указанные модели учитывают существование имеющих важное значение нелинейности, асимметричности и «долгой памяти» волатильности и тот факт, что доходность не соответствует нормальному распределению, но соответствует целому ряду параметрических и непараметрических распределений.

Кроме того, наблюдалось существенное развитие родственных, но в эконометрическом плане отличных моделей волатильности, называемых моделями стохастической волатильности, или SV-моделями. См., например, работы Clark (1973), Taylor (1986), Harvey, Ruiz, and Shephard (1994) и Taylor (1994). В данных моделях используется иной процесс генерирования данных, который делает их более удобными для достижения некоторых целей, но при этом более трудными для оценки. При условии нелинейности эти модели были бы просто иным представлением одного и того же процесса; однако в случае нелинейности альтернативные спецификации не тождественны, хотя и являются близкой аппроксимацией.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Успех семейства моделей ARCH в значительной мере связан с использованием в финансовой сфере. Несмотря на то что эти модели применимы для решения многих статистических проблем на основе временных рядов данных, они обладают особой ценностью при анализе временных рядов финансовых данных. Отчасти это обусловлено значением ранее рассмот-

ренного компромиссного выбора между риском и доходностью на финансовых рынках, а отчасти – тремя известными характеристиками доходности рискованного финансового актива. Доходность практически непредсказуема. Во многих случаях она является на удивление высокой, при этом крайние и обычные значения показателя доходности группируются во времени. Данные характеристики зачастую описываются как *непредсказуемость*, «*тяжелые хвосты*» *распределения* и *группирование волатильности*. Именно для анализа данных с подобными характеристиками и предназначена модель ARCH. Когда волатильность является высокой или низкой, весьма вероятно, что она такой и останется. Однако эти периоды ограничены во времени, поэтому прогноз волатильности, в конечном счете, непременно возвратится к менее крайнему значению. Модель ARCH позволяет получать динамичные и предполагающие возвращение к среднему прогнозы волатильности. В рамках этой модели можно также получить большое количество крайних значений, обусловленных стандартным нормальным распределением, поскольку крайние значения в период высокой волатильности являются более высокими, чем можно было ожидать исходя из процесса постоянной волатильности.

Основную спецификацию, используемую в финансовой сфере, представляет собой модель GARCH (1, 1). Примечательно, что одна эта модель может быть использована для описания динамики волатильности практически любых рядов данных о доходности финансовых активов. Она применима не только к американским акциям, но и к акциям, которыми торгуют на большинстве развитых рынков, большинству акций, которыми торгуют на развивающихся рынках, и большинству индексов доходности акций. Она применима к обменным курсам, доходности по облигациям и доходности товаров. Во многих случаях в приведенном выше списке моделей можно найти более подходящую модель, однако модель GARCH, как правило, является весьма хорошей отправной точкой.

Следует объяснить причины широкого успеха модели GARCH (1, 1). Данная теория позволяет понять, почему динамика волатильности схожа на разнообразных финансовых рынках. При разработке подобной теории необходимо вначале выяснить, почему изменяются цены активов. Покупка и владение финансовыми активами осуществляются по причине ожидания будущих платежей. Поскольку данные платежи являются неопределенными и зависят от неизвестных будущих событий, то справедливая цена актива зависит от прогнозов относительно распределения этих платежей на основе всей имеющейся на сегодня информации. По прошествии времени мы получаем дополнительную информацию, касающуюся этих будущих событий, и переоцениваем стоимость актива. Таким образом, на базовом уровне волатильность цен финансовых активов обусловлена появлением новой информации. Группирование волатильности отражает группирование поступающей информации. Тот факт, что это справедливо для столь многих активов, означает лишь то, что новости, как правило, группируются во времени.

Чтобы понять причины естественного характера группировки новостей во времени, необходимо сделать более конкретные предположения относительно потоков информации. Рассмотрим определенное событие, такое как изобретение, которое приведет к повышению стоимости фирмы, поскольку увеличит будущие доходы и дивиденды. Воздействие этого события на цены акций зависит от экономической ситуации в целом и на данной фирме. Если фирма находится на грани банкротства, то воздействие может быть очень серьезным, а если она уже функционирует при полной загрузке мощностей, то оно будет совсем слабым. Если экономика характеризуется низкими процентными ставками и избыточным предложением труда, разработка данного нового продукта оказывается несложным делом. При прочих равных условиях реакция будет более сильной в условиях рецессии по сравнению с периодом бума. Следовательно, для нас нет ничего удивительного в более высокой волатильности при экономическом спаде, даже если темпы появления новых изобретений являются постоянными. Это соответствует медленной группировке волатильности, которая приводит к циклам в несколько лет или более продолжительным.

То же самое изобретение может привести и к быстрой группировке волатильности. Когда объявляется об изобретении, рынок не в состоянии немедленно оценить его значение путем изменения цены акций. Субъекты могут расходиться во мнениях, но при этом быть весьма неуверенными в своих оценках. Поэтому они обращают внимание на оценку стоимости фирмы другими субъектами. Если инвестор покупает акции вплоть до того момента, когда цена достигает уровня, соответствующего его оценке новой стоимости фирмы, он может пересмотреть свою оценку после того, как увидит, что другие продолжают их покупать по все более высоким ценам. Инвестор предполагает, что они лучше информированы или вооружены более совершенными моделями, и, следовательно, повышает свою оценку. Конечно же, если другие продают акции, то он может пересмотреть свою цену в сторону понижения. Как правило, данный процесс, смоделированный теоретически и эмпирически для микроструктуры рынка, называется *обнаружением цены*. Он способствует гораздо более быстрой группировке волатильности, чем мы увидели выше. Этот процесс может продолжаться несколько дней или минут.

Но чтобы понять причины и последствия волатильности, нам необходимо рассмотреть не только изобретение. Несмотря на то что темпы появления новых изобретений непредсказуемы, это, безусловно, не относится к другим типам новостей. Интенсивность поступления новостей, как правило, является высокой в периоды войн и экономических потрясений. Вероятно, много новостей будет во время важных мировых саммитов, парламентских слушаний, разбирательств регулирующих органов, выборов или заседаний правлений центральных банков. Данные эпизоды, по всей видимости, имеют среднюю продолжительность, длясь недели или месяцы.

Наблюдаемый нами эмпирический характер изменения волатильности зависит от всех этих трех типов событий. Таким образом, мы ожидаем

увидеть достаточно сложную динамику волатильности и зачастую используем долгосрочные временные ряды данных для построения точных моделей различных временных констант.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЧИН И ПОСЛЕДСТВИЙ ФИНАНСОВОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Раз модель для измерения волатильности уже разработана, естественно попытаться объяснить причины волатильности и ее влияние на экономику. В настоящее время существует множество работ, в которых исследуются различные аспекты данных вопросов. Я ограничусь лишь некоторыми выводами применительно к финансовым рынкам.

Последствия волатильности для финансовых рынков описать легко, хотя, возможно, трудно измерить. В экономике с одним рискованным активом увеличение волатильности приводит к тому, что инвесторы продадут определенную часть данного актива. Если предложение является фиксированным, то, чтобы покупатели приобрели эту часть, цена должна значительно снизиться. При этой новой, более низкой цене ожидаемая доходность более высока ровно настолько, чтобы компенсировать инвесторам увеличение риска. В состоянии равновесия высокая волатильность соответствует высокой ожидаемой доходности. Мертон сформулировал данную теоретическую модель для непрерывного времени (Merton (1980)), а Энгл, Лилиен и Робинс предложили модель для дискретного времени (Engle, Lilien, and Robins (1987)). Если бы цена риска была постоянной во времени, то увеличение условной дисперсии, интерпретированное как линейное, выразилось бы в более высокой ожидаемой доходности. Таким образом, среднее значение уравнения доходности больше не оценивается как равное нулю: оно зависит от квадрата прежней доходности точно таким же образом, как условная дисперсия зависит от квадрата прежней доходности. Данное весьма строгое ограничение коэффициентов может быть проверено и использовано для определения цены риска. Оно также может быть использовано для измерения коэффициента относительного неприятия риска репрезентативного субъекта при тех же самых предположениях.

Эмпирические факты относительно подобного измерения являются неоднородными. Если в работе Engle et al. (1987) был обнаружен значительный положительный эффект, то в работах Chou, Engle, and Kane (1992) и Glosten, Jagannathan, and Runkle (1993) – взаимосвязь, изменяющаяся во времени, которая может быть отрицательной вследствие пропущенных переменных. В работе French, Schwert, and Stambaugh (1987) показано, что неожиданное повышение волатильности должно оказывать и оказывает отрицательное воздействие на цены активов. Экономика не ограничивается существованием единственного рискованного актива, а цена риска, вероятно, не является постоянной, следовательно, нестабильность не вызывает удивления и не опровергает наличие выбора между риском и

доходностью, но в то же время более точное моделирование этого выбора представляет собой сложную задачу.

Причины волатильности моделируются более непосредственным образом. Поскольку базовая модель ARCH и многие ее варианты описывают условную дисперсию как функцию квадрата лаговой доходности, то доходность является прямой причиной волатильности. Лучше всего интерпретировать ее как наблюдаемый показатель, а не как причину, что помогает при прогнозировании волатильности. Если в спецификацию включены фактические причины, то лаги можно не учитывать.

В некоторых работах авторы пошли именно таким путем. Андерсен и Боллерслев исследовали влияние объявления итогов заседаний правлений центральных банков на волатильность обменного курса (Andersen, Bollerslev (1998b)). Трудности обнаружения важной объяснительной силы в данном случае очевидны, даже если подобные объявления действительно имеют значение. Другой подход заключается в использовании волатильности, измеряемой на других рынках. В работе Engle, Ng, and Rothschild (1990) представлены факты, свидетельствующие о том, что волатильность цен акций в будущем ведет к волатильности стоимости облигаций. Энгл, Ито и Лин моделируют воздействие волатильности на рынках, которые закрываются раньше, на рынки, которые закрываются позднее (Engle, Ito, and Lin (1990)). Например, они исследуют воздействие волатильности обменных курсов на европейских и азиатских рынках, а также американском рынке в предшествующий день на сегодняшнюю волатильность обменных курсов на американском рынке. В работах Namao, Masulis, and Ng (1990), Burns, Engle, and Mezrich (1998) и других аналогичные методы были применены к мировым рынкам акций.

6. ПРИМЕР

Чтобы проиллюстрировать использование моделей ARCH в финансовой сфере, я приведу достаточно подробный анализ сводного индекса Standard & Poor's 500. Данный индекс отражает значительную часть стоимости всех акций, котируемых на американском фондовом рынке. Я рассматриваю ежедневные значения данного индекса за период с 1963 до конца 2003 г. Это позволяет изучить финансовую историю США, что обеспечивает идеальную среду для рассмотрения того, каким образом модели ARCH используются для управления риском и ценообразования на опционы. Все статистические данные и графики получены с помощью программы «EViews 4.1».

Исходные данные представлены на рис. 1, где цены откладываются по левой оси. Достаточно однородная кривая показывает, что происходило с индексом в последние сорок лет. Легко увидеть значительный рост цен акций в данный период и последующее снижение в новом тысячелетии. В начале 1963 г. индекс находился на уровне 63 долл., а в конце 2003 г. – на уровне 1035 долл. Это означает, что один доллар, инвестированный в

1963 г., превратился бы в 16 долл. к 21 ноября 2003 г. (плюс поток дивидендов, который можно было бы получить, поскольку данный индекс не учитывает дивиденды на ежедневной основе). Если бы данный инвестор был достаточно умным, чтобы продать свои акции 24 марта 2000 г., то имел бы 24 долл. Будем надеяться, что он не был столь неудачлив, чтобы покупать акции в этот день. Хотя мы зачастую видим графики, отражающие изменения этих индексов, очевидно, что значение имеет относительная цена покупки и продажи. Таким образом, экономисты акцентируют внимание на доходности, которая изображена в верхней части графика. В этой части показано ежедневное изменение цены, отложенное по правой оси (рассчитанное как логарифм сегодняшней цены, деленной на вчерашнюю цену). Указанный ряд данных о доходности колеблется около нуля в рамках выборочного периода, несмотря на то что цены иногда растут, а иногда снижаются. В настоящее время самым драматичным событием является крах октября 1987 г., приведший к значительному сокращению доходности, которая впоследствии несколько увеличилась.

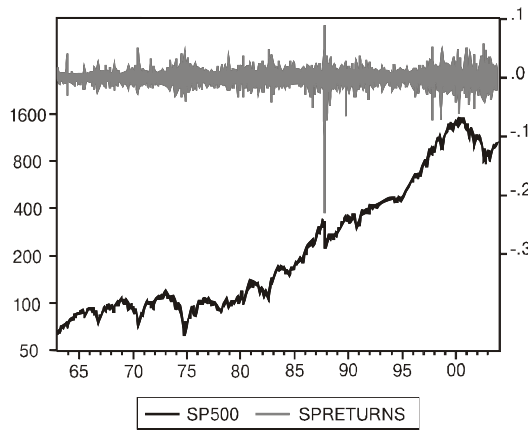


Рис. 1. Ежедневные цены и доходность в соответствии с индексом S&P 500, январь 1963 – ноябрь 2003 гт.

Другие важные характеристики этого ряда данных лучше всего демонстрировать на примере отдельных исторических периодов. Например, на рис. 2 показаны те же данные до 1987 г. Совершенно очевидно, что амплитуда изменения доходности меняется. Масштаб изменений иногда является значительным, а иногда – небольшим. Именно для измерения данного эффекта, который мы назвали группированием волатильности, и предназначена модель ARCH. Однако на этом графике видна и другая интересная характеристика. Понятно, что волатильность выше, когда цены падают. Волатильность, как правило, выше на рынках с тенденцией на понижение. Это – асимметричный эффект волатильности, описанный Нельсоном с помощью модели EGARCH.

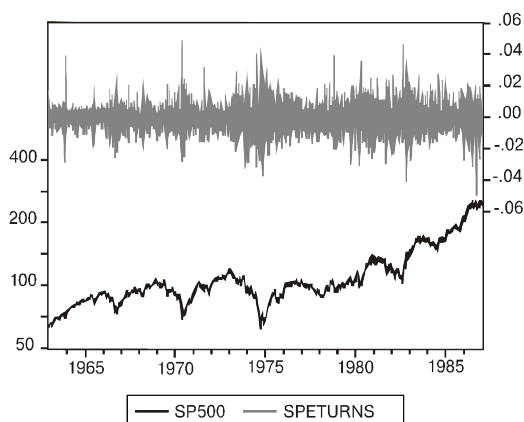


Рис. 2. Ежедневные цены и доходность в соответствии с индексом S&P 500, январь 1963 – декабрь 1987 г.

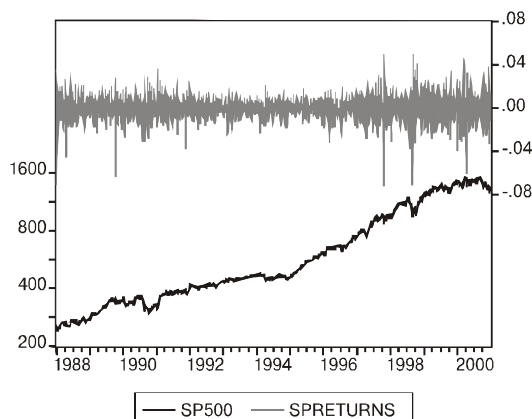


Рис. 3. Ежедневные цены и доходность в соответствии с индексом S&P 500, 1988–2000 г.

Рассмотрев на рис. 3 следующий отрезок времени после краха 1987 г., мы увидим период рекордно низкой волатильности середины 1990-х гг. Он сопровождался медленным и устойчивым ростом цен акций. Среди экономистов часто возникали дискуссии относительно того, двигался ли рынок к новому периоду низкой волатильности. Как показывает история, не двигался. Начиная с 1998 г. волатильность увеличивалась, поскольку цены акций становились все выше и выше, достигнув очень высокого уровня. Очевидно, что с данной точки зрения фондовый рынок был рискованным, однако инвесторы готовы идти на этот риск по причине достаточно высокой доходности. Рассмотрев на рис. 4 последний отрезок време-

ни, начавшийся с 1998 г., мы увидим сохранение высокой волатильности, поскольку рынок пошел вниз. Лишь в конце выборочного периода наблюдается значительное снижение волатильности вследствие официального окончания войны в Ираке. По-видимому, это содействовало возвращению инвесторов на рынок, на котором происходил существенный рост цен.

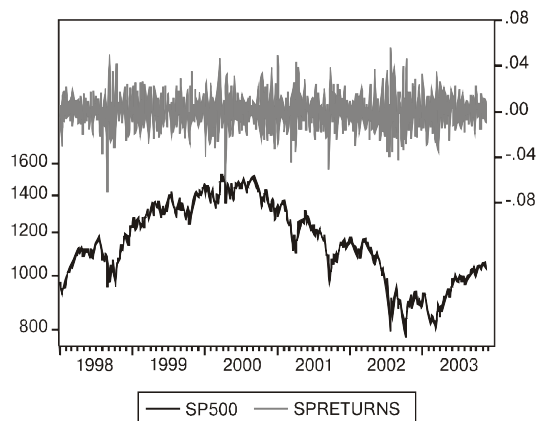


Рис. 4. Ежедневные цены и доходность в соответствии с индексом S&P 500, 1998–2003 гг.

Теперь мы рассмотрим некоторые статистические данные, иллюстрирующие три упомянутых выше гипотетических факта: практически непредсказуемую доходность, «тяжелые хвосты» распределения и группирование волатильности. Некоторые характеристики доходности приведены в табл. 1. В обоих периодах средняя доходность гораздо ближе к нулю, чем стандартное отклонение: она равна 0.03% за операционный день, или около 7.8% за год. Стандартное отклонение несколько выше в 1990-е гг. Данные стандартные отклонения соответствуют волатильности в 15 и 17% в годовом выражении. Коэффициент асимметрии небольшой в течение всего периода.

Таблица 1

Доходность в соответствии с индексом S&P 500

	1963–2003	1990–2003
Среднее значение	0.0003	0.0003
Стандартное отклонение	0.0094	0.0104
Коэффициент асимметрии	-1.44	-0.10
Коэффициент эксцесса	41.45	6.78

Наиболее интересная характеристика – это коэффициент эксцесса, который отражает величину крайних значений. Если доходность является нормально распределенной, то коэффициент эксцесса равен трем. Коэффициент эксцесса для 1990-х гг. является значительным на уровне 6.8,

тогда как для всей выборки он принимает огромное значение, равное 41. Это убедительное доказательство того, что крайние значения более высокие, чем можно ожидать от нормально распределенной случайной переменной. Аналогичные факты представлены графически на рис. 5, который является квантильной диаграммой, построенной на основе данных 1990–2003 гг. Она строится таким образом, что график представляет собой прямую линию, если доходность нормально распределена, и имеет *s*-образную форму, если крайние значения достаточно велики.

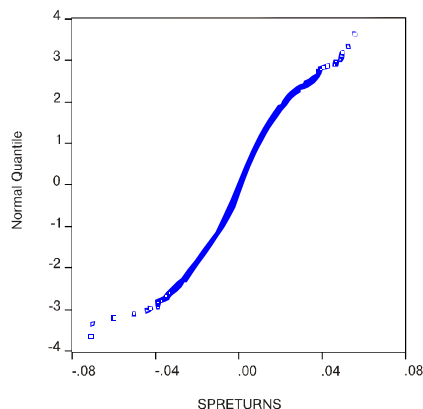


Рис. 5. Квантильная диаграмма доходности в соответствии с индексом S&P 500, 1990–2003 гг.

Непредсказуемость доходности и группирование волатильности можно ярко продемонстрировать с использованием автокорреляции. Автокорреляция представляет собой корреляцию между сегодняшним значением случайной переменной и ее значением несколькими днями ранее. Предсказуемость представляется как наличие значительной автокорреляции доходности, а группирование волатильности — как наличие значительной автокорреляции доходности в квадрате или в абсолютном выражении. На рис. 6 представлены оба этих показателя, рассчитанных на основе данных 1990–2003 гг. При использовании общепринятых критериев¹ автокорреляция, превышающая 0,033 в абсолютном выражении, значима на 5% уровне. Очевидно, что практически все случаи автокорреляции доходности являются незначимыми, тогда как все случаи автокорреляции квадрата доходности — значимыми. Кроме того, автокорреляция квадрата доходности является положительной, что вряд ли представляет собой случайное явление. Данный рисунок убедительно свидетельствует как о непредсказуемости доходности, так и о группировании волатильности.

¹ Фактические критические значения будут несколько больше, поскольку ряды данных, очевидно, характеризуются гетероскедастичностью. Это делает доказательство непредсказуемости доходности еще более убедительным.

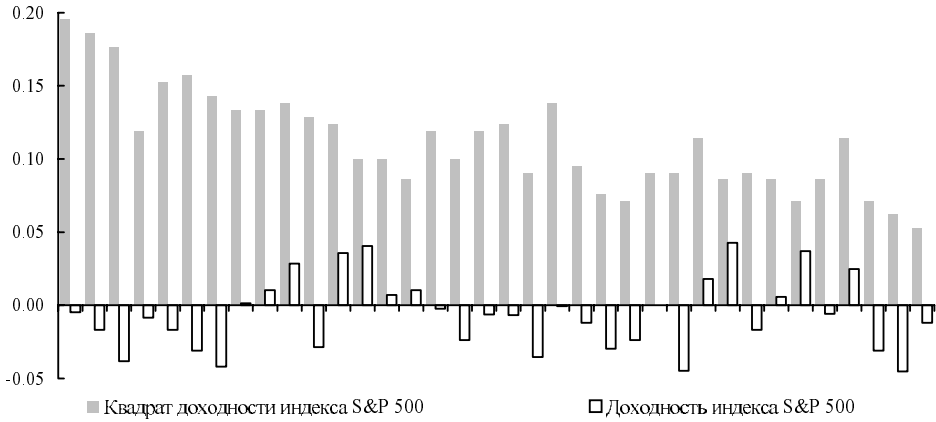


Рис. 6. Автокорреляция доходности и квадрата доходности

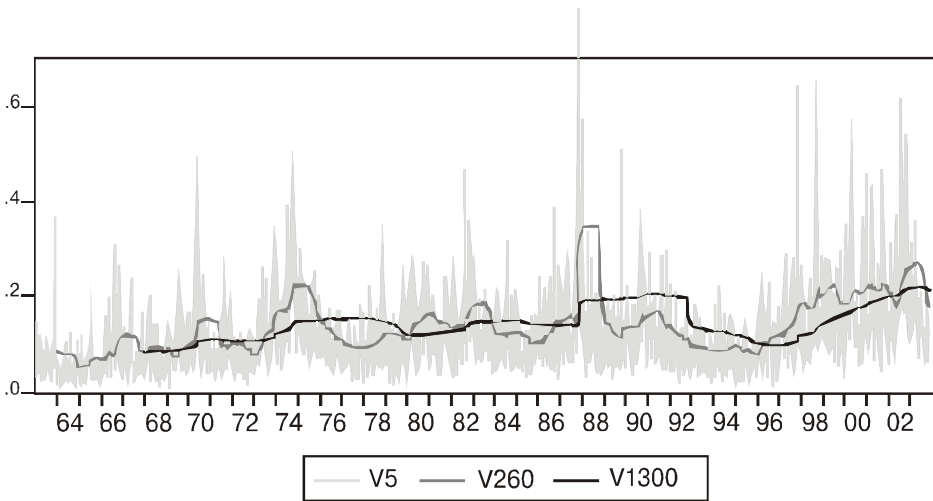


Рис. 7. Волатильность прошлых периодов с использованием различных интервалов

Сейчас мы обращаемся к проблеме оценки волатильности. Оценки, называемые волатильностью прошлых периодов, базируются на скользящих стандартных отклонениях доходности. На рис. 7 они рассчитаны для пятидневного, однолетнего и пятилетнего интервалов. Хотя каждый из этих подходов может показаться обоснованным, ответы, полученные на их основе, существенно различаются. Пятидневная оценка чрезвычайно изменчива, тогда как две другие являются более сглаженными. Пятилетняя оценка практически не имеет таких максимальных и минимальных значений, которые характерны для двух других. Она весьма медленно увеличи-

вается после краха 1987 г. и практически не указывает на повышение волатильности в 1998–2000 гг. Точно таким же образом ежегодная оценка не может показать все детали, отражаемые пятидневной волатильностью. Однако некоторые из этих деталей могут быть просто шумом. Не имея какого-либо точного показателя волатильности, трудно сделать выбор среди этих оценок.

Модель ARCH позволяет решить данную дилемму. Оценивая неизвестные параметры на основе данных за прошлые периоды, мы получаем прогнозы на каждый день выборочного периода и на любой период вне выборки. Обычно для осуществления этих оценок в первую очередь используется модель GARCH (1, 1). В рамках данной модели веса присваиваются безусловной дисперсии, прежнему прогнозу и показателю новостей, измеряемому квадратом вчерашней доходности. По оценкам, веса равны 0.004, 0.941 и 0.055 соответственно.² Очевидно, источником основной массы информации является прогноз, сделанный в предыдущий день. Новая информация ведет к незначительным изменениям, а долгосрочная средняя дисперсия имеет небольшой эффект. Возникает впечатление, что долгосрочный эффект дисперсии настолько мал, что не имеет никакого значения. Это неверно. При прогнозировании будущих шагов долгосрочная дисперсия, в конечном счете, играет главенствующую роль, поскольку значение новостей и другой последней информации постепенно уменьшается. Разумеется, небольшая величина дисперсии объясняется использованием ежедневных данных.

В данном случае мы используем модель асимметричной волатильности, которая иногда называется моделью GJR–GARCH Глостена, Яганнана и Ранкла (Glosten et al. (1993)), или моделью TARARCH, то есть пороговой моделью ARCH Закояна (Zakoian (1994)). Статистика приведена в табл. 2. В данном случае существуют два типа показателей новостей: квадрат доходности и переменная, равная квадрату доходности, когда доходность является отрицательной, а в ином случае равняется нулю. В среднем, данная переменная в два раза меньше дисперсии, и поэтому с учетом того, что веса будут в два раза меньше, ее необходимо удвоить. Теперь веса рассчитываются для среднего значения в долгосрочном периоде, предыдущего прогноза, показателя симметричных новостей и показателя негативных новостей. По оценкам, эти веса равны 0.002, 0.931, 0.029 и 0.038 соответственно.³ Очевидно, асимметрия имеет важное значение, поскольку в противном случае последний член равнялся бы нулю. Фактически негативная доходность в данной модели оказывает в три раза больший эффект на будущие дисперсии по сравнению с положительной доходностью. Со статистической точки зрения показатель асимметрии имеет *t*-статистику, почти равную 20, и является весьма значимым.

² Для традиционной модели GARCH, представленной в виде $h_{t+1} = \omega + \alpha r_t^2 + \beta h_{t+1}$, веса равны $1 - \alpha - \beta$, β и α .

³ Если модель имеет вид $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \lambda r_{t-1}^2 I_{r_{t-1} < 0}$, то веса равны $1 - \alpha - \beta - \gamma/2$, β , α и $\gamma/2$.

Таблица 2

**Оценки данных о доходности в соответствии с индексом S&P 500
на основе модели TARСH**

Зависимая переменная: <i>SP</i>				
Метод: ML-ARCH (метод Марквардта)				
Дата: 24 ноября 2003 г. Время: 09:27				
Выборка (скорректированная): 03.01.1963 г. – 21.11.2003 г.				
Включено наблюдений: 10667 после корректировки конечных результатов				
Конвергенция достигнута после 22 итераций				
Ретроропляция дисперсии: да				
	Коэффициент	Стандартная ошибка	z-статистика	Вероятность
<i>C</i>	0.00	0.00	4.51	0.00
Уравнение дисперсии				
<i>C</i>	0.00	0.00	8.98	0.00
ARCH (1)	0.03	0.00	8.60	0.00
(RESID < 0) * ARCH (1)	0.08	0.00	19.93	0.00
GARCH (1)	0.93	0.00	414.47	0.00

Ряды данных о волатильности, сгенерированные с помощью этой модели, представлены на рис. 8. Указанные ряды являются более изменчивыми, чем ежегодные или пятилетние волатильности, однако менее изменчивы по сравнению с пятидневными волатильностями. Поскольку они предназначены для измерения волатильности доходности на следующий день, было бы естественным построить доверительные интервалы для доходности. На рис. 9 изображена доходность, а также ± 3 стандартные отклонения на основе модели TARСH. Очевидно, доверительные интервалы меняются весьма правдоподобным образом. Постоянный интервал между доверительными границами был бы слишком широким в одни периоды и слишком узким – в другие. Применительно к интервалам на основе модели TARСH должна существовать 99.7% вероятность включения в него следующего наблюдения, если данные действительно нормально распределены. Таким образом, ожидаемое количество случаев, когда следующий показатель доходности окажется вне интервала, должно составлять лишь 29 из более чем 10000 дней. Фактически существует 75 дней, которые показывают, что выбросов больше, чем можно ожидать в случае нормального распределения.

Дополнительная информация относительно волатильности может быть получена на рынках опционов. Стоимость торгуемых опционов непосредственно зависит от волатильности соответствующего актива. Тщательно сформированный портфель опционов с различными ценами исполнения имеет стоимость, которая отражает оценку участниками рынка опционов будущей волатильности при достаточно слабых предположениях. В настоящее время расчет волатильности осуществляется Чикагской опционной биржей применительно к опционам на акции, входящие в индекс S&P 500, и сообщается в виде индекса волатильности рынка VIX. Заслуживают упоминания две предпосылки, лежащие в основе данного индекса. Процесс ценообразования должен быть непрерывным, а премия за риск в случае шоковых изменений волатильности должна отсутствовать. Если эти предпосылки более или менее соответствуют действительности, то подразумеваемые волатильности могут быть сопоставлены с волатильно-

стями на основе модели ARCH. Поскольку индекс VIX отражает волатильность одномесячных опционов, то волатильности на основе модели TARЧH прогнозируются на срок свыше одного месяца.

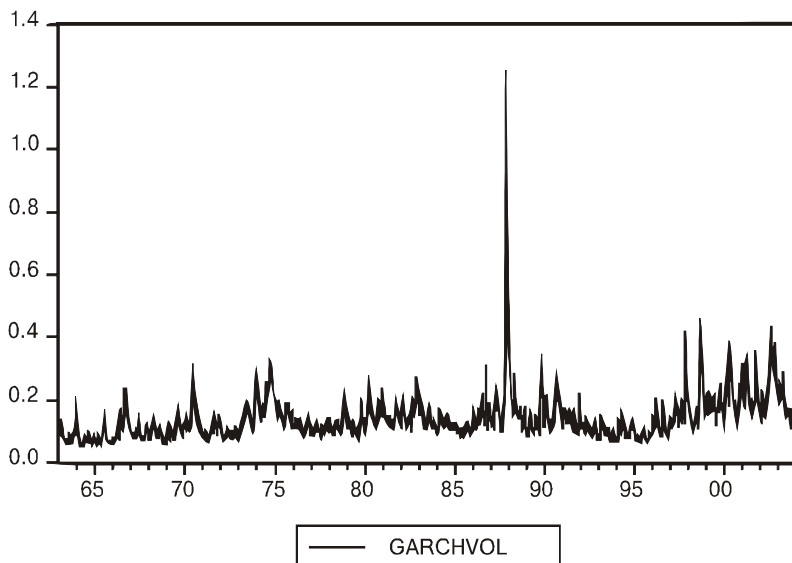


Рис. 8. Волатильность на основе модели GARCH

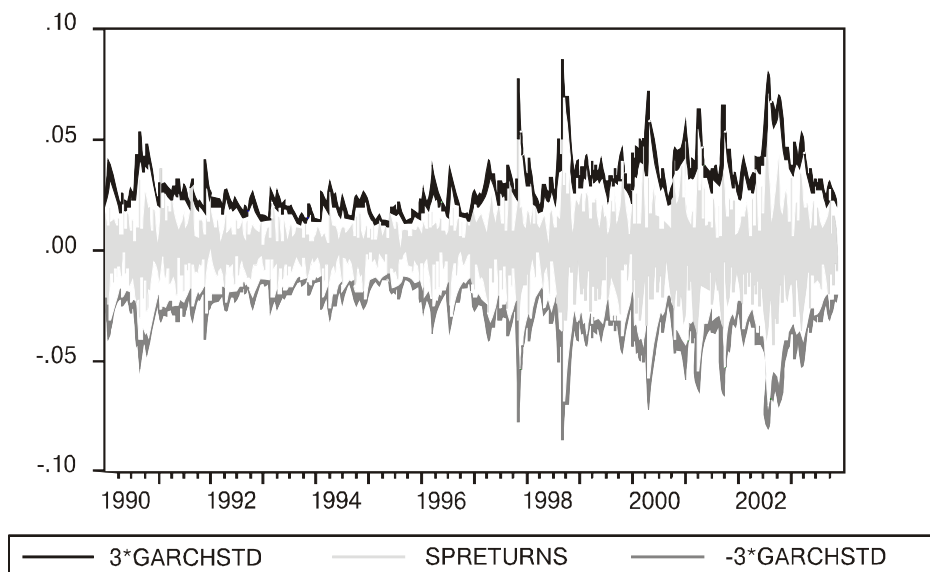


Рис. 9. Доверительные интервалы на основе модели GARCH: три стандартных отклонения

Результаты изображены на рис. 10⁴. Общий характер изменений является весьма схожим, хотя волатильность на основе модели TARЧН несколько меньше волатильности, отражаемой индексом VIX. Эти различия могут быть обусловлены двумя причинами. Во-первых, в данной ситуации ценовое соотношение опционов недостаточно корректно, поскольку не учитывается возможность наличия премии за риск волатильности или то, что доходность не соответствует нормальному распределению. Соответствующие корректировки привели бы к более высоким ценам на опционы, и, следовательно, подразумеваемые волатильности были бы слишком высокими. Во-вторых, базовые модели ARCH имеют весьма ограниченное информационное множество. В них не используется информация о заработках, войнах, выборах и т.д. Следовательно, прогнозы волатильности трейдерами должны быть, как правило, лучше; различия могут быть обусловлены продолжительными информационными событиями.

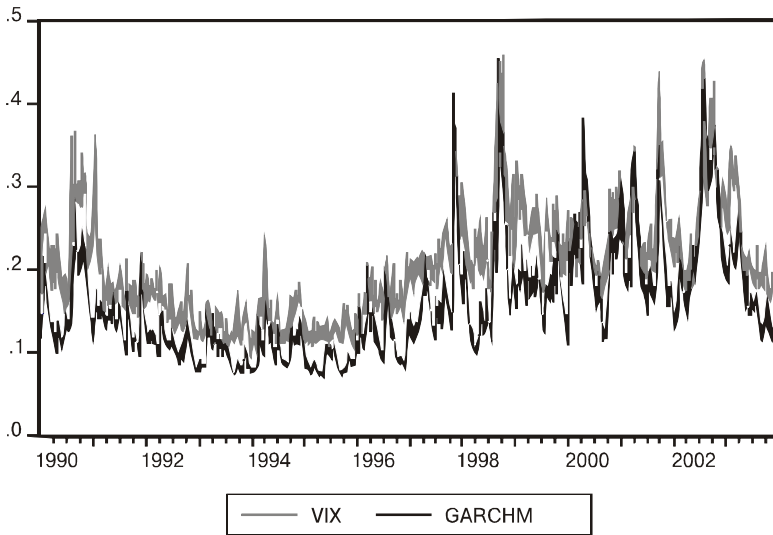


Рис. 10. Подразумеваемая волатильность и волатильность на основе модели GARCH

Данный подробный пример иллюстрирует многие характеристики моделей ARCH и GARCH и то, каким образом они используются для изучения процессов волатильности. Теперь мы обращаемся к финансовой практике и описываем два широко применяемых направления использования указанных моделей. В данной статье будут продемонстрированы некоторые новые следствия асимметричной волатильности.

⁴ Индекс волатильности рынка VIX скорректирован с учетом того, что в году 252 операционных дня.

7. ФИНАНСОВАЯ ПРАКТИКА: РИСКОВАЯ СТОИМОСТЬ

Каждое утро в тысячах банках и финансовых институтах по всему миру сотрудник, отвечающий за управление рисками, представляет генеральному директору карту рисков, где оцениваются риски всего портфеля и многих его составляющих. Как правило, он узнает о риске, с которым сталкиваются подразделения фирмы, занимающиеся европейскими акциями, американскими казначейскими облигациями, торговлей валютой, производными ценными бумагами и т.д. Указанные риски могут быть даже детализированы для отдельных торговых мест или трейдеров. Затем общий показатель представляется регулирующему органу, хотя это может быть и не тот показатель, который используется для внутренних целей. Риск компании в целом меньше, чем сумма рисков ее подразделений, поскольку различные компоненты риска не будут тесно коррелировать.

Типичным показателем каждого из этих рисков является рисковая стоимость, зачастую обозначаемая аббревиатурой VaR (Value at Risk). VaR является показателем, отражающим вероятность убытков, которые возникают при формировании определенного портфеля. Однодневный показатель VaR для доверительного уровня 99% показывает, что вероятность убытков в течение ближайшего дня в меньшем, чем значение данного показателя, размере составляет 99%. Если при торговле валютой значение однодневного показателя VaR равно 50000 долл., то сотрудник, отвечающий за риски, скажет, что лишь в один день из ста убытки по портфелю будут превышать 50000 долл. Безусловно, это означает, что около 2.5 дней в год убытки будут превышать значение VaR. VaR является показателем риска, суть которого легко понять, не обладая какой-либо статистической информацией. Однако данный показатель представляет собой лишь один квантиль прогнозного распределения и, следовательно, передает ограниченную информацию о вероятности убытков.

Иногда показатель VaR определяется на многодневной основе. Десятидневный показатель VaR для доверительного уровня 99% показывает, что вероятность убытков в течение ближайших десяти дней в меньшем, чем значение данного показателя, размере составляет 99%. Это более распространенный регулирующий стандарт, однако он, как правило, рассчитывается путем простой корректировки однодневного показателя, что будет рассмотрено ниже. Данные об убытках предполагают, что структура портфеля не меняется в течение десятидневного периода, что может противоречить фактам.

Чтобы рассчитать показатель VaR для торгового подразделения или фирмы в целом, необходимо располагать сведениями о дисперсиях и ковариациях, или, что то же самое, о волатильностях и корреляциях, для всех активов, входящих в портфель. Как правило, активы рассматриваются как подверженные одному или более факторам риска, которые подлежат непосредственному моделированию. Например, методика RiskMetrics позволяет учитывать около 400 глобальных факторов риска. Консалтинговая

компания «BARRA» учитывает факторы промышленного риска, а также факторы риска, базирующиеся на характеристиках фирмы, и др. Риск диверсифицированного портфеля американских акций определяется, главным образом, агрегированным рыночным индексом, таким как S&P 500. Чтобы рассчитать показатель VaR для портфеля, который имитирует структуру индекса S&P 500, мы используем пример из предыдущего раздела.

Однодневный показатель VaR для доверительного уровня 99% применительно к индексу S&P 500 оценивается при помощи модели ARCH. На основе данных за прошлые периоды оценивается наилучшая модель, а затем рассчитывается стандартное отклонение для следующего дня. В случае использования индекса S&P 500 по состоянию на 24 ноября данное прогнозное стандартное отклонение равно 0.0076. Чтобы перевести его в показатель VaR, необходимо сделать предположение о распределении доходности. Если предполагается, что распределение является нормальным, то один процентный пункт соответствует -2.33 стандартного отклонения от нуля. Таким образом, рисковая стоимость в 2.33 раза превышает стандартное отклонение, или, применительно к ситуации по состоянию на 24 ноября, равна 1.77%. Мы можем быть уверенными на 99% в том, что не потеряем более 1.77% стоимости портфеля по состоянию на 24 ноября. В действительности, 2-го числа рынок пошел вверх, поэтому убытков не было.

Предположение о нормальном распределении вызывает много вопросов. Мы увидели, что во многих случаях доходность финансовых активов на удивление высока. Если мы разделим доходность на стандартные отклонения на основе модели TARARCH, то получим постоянную волатильность, равную единице, и при этом распределение не будет нормальным. Коэффициент эксцесса этой «доходности без волатильности», или «нормализованных остатков», равен 6.5, что значительно меньше коэффициента безусловного эксцесса, но по-прежнему существенно больше значения, соответствующего нормальному распределению. Исходя из доходности без волатильности, мы можем определить 1%-й квантиль и использовать его для улучшения показателя VaR. Он оказывается меньше среднего значения на 2.65 стандартного отклонения. Таким образом, наш портфель является более рисковым, чем мы полагали, аппроксимировав нормальное распределение. Теперь, по оценкам, однодневный показатель VaR для доверительного уровня 99% равен 2%.

Регулирующие органы зачастую требуют публикации десятидневного показателя рыночной стоимости, который также часто используется во внутренних целях. Стоимость, которую портфель может потерять за десять дней, существенно больше стоимости, которую он потеряет за один день. Однако насколько больше? При постоянной волатильности ответ был бы простым: она составила бы количество раз, равное квадратному корню из 10. Поскольку десятидневная дисперсия в десять раз больше однодневной дисперсии, то коэффициент при десятидневной волатильности был бы квадратным корнем из 10. Мы взяли бы однодневное стандар-

тное отклонение и умножили его на 3.16, а затем, при условии нормального распределения, умножили данное значение на 2.33, получив 7.36 стандартного отклонения. Это – традиционное решение в промышленной практике. По состоянию на 24 ноября десятидневный показатель VaR для доверительного уровня 99% равнялся 5.6% стоимости портфеля.

Однако в данном случае не принимаются во внимание две важные характеристики динамических моделей волатильности. Во-первых, для того чтобы прогнозировать увеличение или уменьшение волатильности в следующие десять дней, необходимо знать, является ли текущая волатильность низкой или высокой по сравнению со средним значением в долгосрочном периоде. Поскольку в ноябре волатильность являлась относительно низкой, то на основе модели TARСН прогнозируется ее увеличение в следующие десять дней. В этом случае данный эффект не очень большой, поскольку, по прогнозу, стандартное отклонение должно увеличиться с 0.0077 до 0.0076 в течение десятидневного периода.

Более интересным является влияние асимметрии дисперсии на многопериодную доходность. Даже если распределение доходности в каждый период является симметричным, распределение многопериодной доходности будет асимметричным. Данный эффект легко понять, однако его существование признается не всеми. Этот эффект несложно проиллюстрировать с помощью двухшагового биномиального дерева решений (рис. 11), которое используется в элементарных моделях ценообразования на опционы. В первый период цена актива или увеличивается, или снижается, и вероятность каждого исхода одинакова. Во второй период дисперсия зависит от того, повысилась или снизилась цена. Если она повысилась, то дисперсия будет меньше, так что биномиальные ветви располагаются относительно близко друг к другу. Если цена снизилась, то дисперсия будет больше, так что исходы расходятся еще больше. После двух периодов существуют четыре исхода с равной степенью вероятности. Распределение является достаточно асимметричным, поскольку плохой исход гораздо хуже по сравнению с ситуацией, если бы дисперсия была постоянной.

Чтобы рассчитать показатель VaR в данных условиях, необходимо имитационное моделирование. Имитация осуществлена на основе модели TARСН для десятидневного временного интервала с использованием нормально распределенных случайных переменных и их значений начиная с 21 ноября.⁵ Подобная процедура проведена 10000 раз, а затем наихудшие исходы отсортированы с тем, чтобы определить значение показателя рисковой стоимости, соответствующее 1%-му квантилю. Результатом является 7.89 стандартного отклонения. Данный показатель VaR значительно больше значения, предполагающего постоянную волатильность.

⁵ В указанном примере имитация началась с безусловной дисперсии, поэтому отдельно можно рассмотреть эффект агрегирования по времени. Кроме того, среднее значение принято равным нулю, однако это играет незначительную роль в рамках подобных краткосрочных временных интервалов.

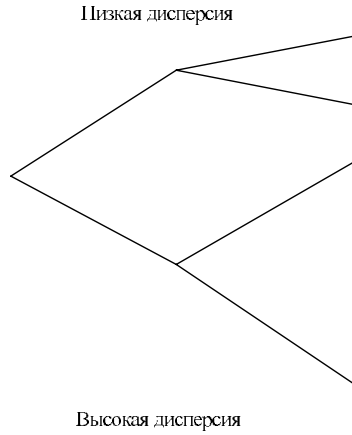


Рис. 11. Двухшаговое биномиальное дерево решений с асимметричной волатильностью

Чтобы избежать использования предположения о нормальном распределении, можно осуществить имитационное моделирование, исходя из эмпирического распределения нормализованных остатков. Подобное имитационное моделирование зачастую называется бутстрепом: каждый набор случайных переменных в равной степени отражает любое наблюдение нормализованных остатков. Таким образом, наблюдение, соответствующее краху октября 1987 г., может быть получено один раз или даже дважды при одном имитационном моделировании, но не при другом. Результатом является коэффициент при стандартном отклонении, равный 8.52, который необходимо использовать для расчета показателя VaR. Применительно к нашей ситуации по состоянию на 24 ноября десятидневный показатель VaR для доверительного уровня 99% равен 6.5% стоимости портфеля.

8. ФИНАНСОВАЯ ПРАКТИКА: ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Другой важной областью практических финансов является оценка и управление производными ценными бумагами, такими как опционы. Как правило, они оцениваются теоретически на основе некоторого процесса, установленного для соответствующего актива. Затем рыночные цены производных ценных бумаг определяются исходя из параметров этого базового процесса. Данная стратегия зачастую называется «ценообразованием в отсутствие арбитража». Однако для решения определенных задач финансового анализа данный подход является неадекватным. Он не позволяет определить риск владения производной ценной бумагой, поскольку каждая новая рыночная цена соответствует различному набору параметров, а

размер и частота изменения этих параметров усиливают риск. По этой же причине трудно подобрать оптимальные стратегии хеджирования. И, наконец, невозможно определить цену нового выпуска или то, продаются некоторые производные ценные бумаги со скидкой или премией.

Сопутствующий анализ, зачастую осуществляемый трейдерами, занимающимися производными ценными бумагами, заключается в построении фундаментальных моделей ценообразования, позволяющих определить адекватную цену производной ценной бумаги исходя из наблюдаемых характеристик соответствующего актива. Данные модели включают показатели операционных издержек, издержек хеджирования и риска управления портфелем опционов.

В данном разделе используется простая имитационная модель ценообразования на опционы для того, чтобы проиллюстрировать применение моделей ARCH в данном виде фундаментального анализа. Пример касается ценообразования на опционы «пут» по индексу S&P 500, до даты исполнения которых осталось десять операционных дней.

Опцион «пут» предоставляет владельцу право продать актив по определенной цене, которая называется ценой исполнения опциона. Таким образом, если цена актива меньше цены исполнения, то владелец зарабатывает деньги путем продажи по цене исполнения опциона и покупки по рыночной цене. Прибылью является разница между этими ценами. Однако если рыночная цена выше цены исполнения, то опцион не имеет никакой ценности. Если в портфеле инвестора есть соответствующий актив и он покупает опцион «пут», это дает ему гарантию, что он будет иметь, по меньшей мере, цену исполнения в день исполнения опциона. Именно поэтому данные опционы рассматриваются как страховые контракты.

Имитационная модель работает точно так же, как и модель из предыдущего раздела. Имитация осуществляется 10000 раз на основе модели TARCN с использованием данных на конец выборочного периода. Анализ при помощи бутстрепа используется таким образом, чтобы распределение, не совпадающее с нормальным, уже было включено в имитационную модель. Данная имитация должна соответствовать «нейтральному к риску» распределению, то есть распределению, в котором цены активов определяются на уровне дисконтированных ожидаемых значений. Нейтральное к риску распределение ненамного отличается от эмпирического распределения, поэтому в последнем случае имеет место премия за явный риск, которая отсутствует при нейтральном к риску распределении. В некоторых моделях, таких как модель Блэка–Шоулза, достаточно скорректировать среднее значение, чтобы оно стало безрисковой ставкой. В нашем примере мы идем именно таким путем. Имитация распределения осуществляется при нулевом среднем значении, которое рассматривается как безрисковая ставка. Как будет показано ниже, подобной корректировки может оказаться недостаточно для того, чтобы исключить риск в распределении.

При помощи имитации мы получаем 10000 в равной степени вероятных исходов на будущие десять дней. Для каждого из этих исходов мы

рассчитываем стоимость конкретного опциона «пут». Поскольку эти исходы в равной степени вероятны, а безрисковая ставка принимается равной нулю, справедливая стоимость такого опциона представляет собой среднее значение. Это можно проделать для опционов «пут» с различными ценами исполнения. Результат представлен на рис. 12. Предполагается, что исходное значение индекса S&P 500 равно 1000, следовательно, опцион «пут» с ценой исполнения в 990 позволяет сохранить стоимость портфеля в течение 10 дней. Данный опцион следует продавать по цене 11 долл. Сохранение стоимости портфеля на текущем уровне обойдется в 15 долл., а для того чтобы быть уверенным, что стоимость будет не менее 1010, необходимо заплатить 21 долл. Показатель VaR для десятидневного периода, рассчитанный в предыдущем разделе, равнялся 65 долл. Сохранение стоимости портфеля на данном уровне стоит около 2 долл. График, отражающий эти цены опционов «пут», имеет ожидаемый наклон: он является монотонно возрастающим и выпуклым.

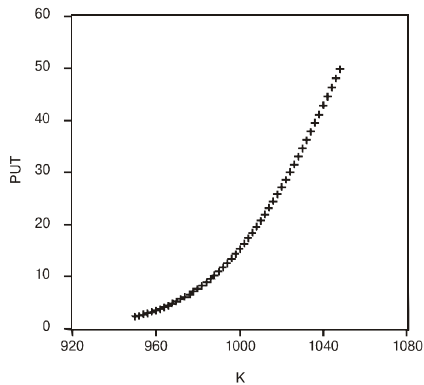


Рис. 12. Цены опционов «пут», рассчитанные путем имитации на основе модели GARCH

В то же время эти цены опционов «пут» отличаются от тех, которые получены в рамках модели Блэка–Шоулза. Это легко увидеть, если рассчитать подразумеваемую волатильность для каждого из опционов «пут». Результат показан на рис. 13. Подразумеваемая волатильность выше для опционов «вне денег» по сравнению с опционами «у денег», а волатильность для опционов «в деньгах»^{*} является еще

^{*} Опцион «вне денег» – опцион «колл», цена исполнения которого больше текущей цены соответствующего актива, или опцион «пут», цена исполнения которого меньше текущей цены соответствующего актива. Опцион «у денег» – опцион, цена исполнения которого равна или очень близка текущей цене обеспечивающего актива. Опцион «в деньгах» – опцион «колл», цена исполнения которого меньше текущей цены базового актива, или опцион «пут», цена исполнения которого больше текущей цены базового актива. Опционы «в деньгах» обеспечивают покупателю прибыль при их реализации. – *Прим. перев.*

меньшей. Если бы цены опционов «пут» рассчитывались на основе модели Блэка–Шоулза, то все эти подразумеваемые волатильности были бы одинаковыми. Данный график подразумеваемой волатильности и цены исполнения знаком трейдерам, занимающимся опционами. Убывающий наклон называется «асимметрией волатильности» и соответствует асимметричному распределению соответствующих активов. Данная характеристика является ярко выраженной в случае опционов на индексы, менее отчетливой в случае опционов на отдельные акции и практически отсутствует в случае валютных опционов, где она называется «улыбкой». Очевидно, что это является следствием использования модели асимметричной волатильности, в результате асимметрия отсутствует в случае валютных опционов и слабее в случае опционов на отдельные акции по сравнению с опционами на индексы.

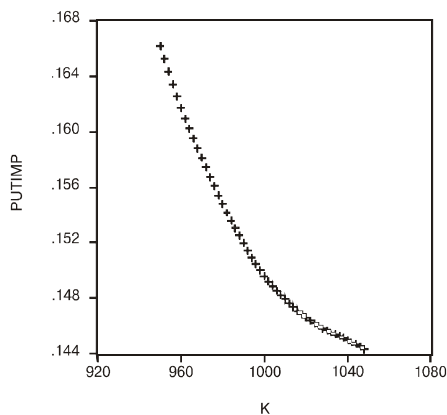


Рис. 13. Подразумеваемая волатильность, рассчитанная путем имитации на основе модели GARCH

Данная характеристика цен опционов убедительно доказывает адекватность моделей асимметричной волатильности. К сожалению, ситуация является более сложной, чем представленная здесь. Фактическая асимметрия опционов, как правило, несколько сильнее, чем полученная на основе асимметричных моделей ARCH. Это ставит под сомнение стратегию нейтрализации риска, принятую в рамках имитационной модели. В настоящее время существует все больше фактов, свидетельствующих о том, что большие убытки вызывают у инвесторов особое беспокойство, и они готовы платить дополнительную премию с тем, чтобы их избежать. Это способствует усилению асимметрии. Необходимая стратегия нейтрализации риска рассмотрена несколькими авторами, такими как Розенберг и Энгл (Rosenberg, Engle (2002)), Бейтс (Bates (2003)) и Джэкверт (Jackwerth (2000)).

9. НОВЫЕ РУБЕЖИ

В настоящее время прошло уже более двадцати лет после появления работы, в которой была представлена модель ARCH. Направления ее развития и использования были просто фантастическими и превзошли самые оптимистичные ожидания. Но что мы можем ожидать в будущем? Каковы следующие рубежи?

Как представляется, существуют два важных направления исследований, которым уделяется значительное внимание и которые обещают иметь важное практическое значение. К ним относится разработка моделей волатильности с высокой периодичностью появления данных и многомерных моделей с высокой размерностью. Я даю краткое описание некоторых из перспективных разработок в этих областях.

Мертон, по-видимому, первым обратил внимание на преимущества данных с высокой периодичностью появления при измерении волатильности. Путем исследования изменения цен акций на все более и более подробной временной шкале, могут быть получены все более совершенные показатели волатильности. Это особенно удобно, если волатильность изменяется очень медленно и динамические соображения можно проигнорировать. Андерсен и Боллерслев отметили, что для оценки качества моделей ежедневной волатильности используются данные, поступающие несколько раз в день (Andersen, Bollerslev (1998a)). В работах Андерсена и его коллег (Andersen et al. (2003)), а также в моей работе (Engle (2002b)) представлены предложения относительно того, каким образом данные, поступающие несколько раз в день, могут использоваться для формирования более точных ежедневных прогнозов волатильности.

Однако самый интересный вопрос заключается в том, как использовать данные с высокой периодичностью появления для формирования соответствующих прогнозов волатильности. По мере появления все большего и большего количества наблюдений достигается предел использования данных о каждой сделке. Я их называю данными *со сверхвысокой периодичностью появления* (Engle (2000)). Подобные сделки нерегулярны, они не заключаются через равные промежутки времени. В принципе, можно разработать способ оценивания, посредством которого показатель волатильности будет корректироваться всякий раз после фиксации торговой сделки. Однако даже отсутствие сделок оказывается информацией, полезной для корректировки показателя волатильности, так что корректировку можно осуществлять еще чаще. Поскольку время появления новых трейдеров является случайной переменной, для создания моделей волатильности со сверхвысокой периодичностью появления данных необходима модель процесса появления новых трейдеров. С этой целью Энгл и Рассел предложили использовать авторегрессионную модель условной продолжительности, или модель ACD (Engle, Russell (1998)). Она является близкой родственницей моделей ARCH, предназначенных для выявления группировки трейдеров или других экономических событий; в рамках этой моде-

ли данная информация используется для прогнозирования вероятности нового события.

В настоящее время многие исследователи эмпирической микроструктуры рынка изучают различные аспекты финансовых рынков, имеющие отношение к данной проблеме. Оказывается, что когда трейдеры группируются, волатильность возрастает. Сами трейдеры обеспечивают информацию, которая влияет на цены. Крупный или средний покупатель вызывает повышение цен, по крайней мере отчасти, вследствие того, что участники рынка полагают, что он может располагать важной информацией относительно того, что цены акций преуменьшены. Данный эффект называется воздействием на цены и является центральным компонентом *риска ликвидности*, а также ключевой характеристикой волатильности при использовании данных со сверхвысокой периодичностью появления. Он также является предметом особой заботы трейдеров, которые не хотят принимать участие в торговле, если их действия оказывают значительное влияние на цены, в особенности, если это всего лишь временное воздействие. По мере роста компьютеризации финансовых рынков скорость и частота заключения торговых сделок будут возрастать. Методы использования данной информации для лучшего понимания причин и последствий волатильности и стабильности рынков будут приобретать все более важное значение.

Другое направление, которое, как я полагаю, получит значительное развитие и найдет широкое применение, – это разработка систем с *высокой размерностью*. В данной работе я акцентировал внимание на волатильности отдельного актива. В большинстве случаев существуют тысячи финансовых активов. Нам необходимы не только модели волатильности этих активов, но и модели корреляции. С момента появления оригинальной модели ARCH предложено много подходов к созданию многомерных систем. Однако наилучший метод решения этой задачи так и не был разработан. По мере увеличения количества активов модели становятся чрезвычайно сложными для того, чтобы их можно было точно специфицировать и оценить. По сути, существует слишком много возможностей. Есть несколько опубликованных работ, где представлены примеры моделей с более чем пятью активами. Наиболее подходящей для этих случаев является модель постоянной условной корреляции, или модель ССС Боллерслева (Bollerslev (1990)). Данная модель достигает своей цели на основе предположения, что условные корреляции являются постоянными. Она допускает изменение дисперсий и ковариаций, но не корреляций.

Обобщением данного подхода является моя модель динамической условной корреляции, или модель DCC (Engle (2002a)). Она включает большое количество параметров для моделирования корреляций вне зависимости от количества активов. Волатильность моделируется с помощью одномерных спецификаций. Таким образом можно сделать прогнозы относительно больших ковариационных матриц. Вначале исследователь оценивает волатильности по отдельности, а затем совместно оценивает

корреляции с использованием небольшого количества дополнительных параметров. Предварительные исследования данного класса моделей дают многообещающие результаты, в частности, это можно сказать о моделях систем с количеством активов до ста. Вслед за этим не замедлили появиться соответствующие практические подходы к управлению риском и распределению активов. Многие исследователи уже разрабатывают похожие модели, которые могут дать еще лучшие результаты. Можно с уверенностью предположить, что в следующие несколько лет мы будем располагать набором полезных методов моделирования волатильности и корреляции больших систем активов.

ЛИТЕРАТУРА

- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1998a) Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review*, 39, 885–905.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T. (1998b) Deutsche Mark–Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies, *Journal of Finance*, 53, February, 219–265.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., and Labys, P. (2003) Modeling and Forecasting Realized Volatility, *Econometrica*, 71, 579–625.
- Bates, D.S. (2003) Empirical Option Pricing: A Retrospection, *Journal of Econometrics*, 116, 387–404.
- Black, F., Scholes, M. (1972) The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency, *Journal of Finance*, 27, 399–417.
- Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- Bollerslev, T. (1990) Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model, *Review of Economics and Statistics*, 72, August, 498–505.
- Bollerslev, T., Chou, R.Y., and Kroner, K.F. (1992) ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, April–May, 5–59.
- Bollerslev, T., Engle R., and Nelson D. (1994) ARCH Models, R. Engle, D. McFadden (eds), *Handbook of Econometrics*, Vol. IV, Amsterdam, North Holland, 2959–3038.
- Bollerslev, T., Rossi, P.E. (1995) Dan Nelson Remembered, *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, October, 361–364.
- Burns, P., Engle, R.F., and Mezrich, J. (1998) Correlations and Volatilities of Asynchronous Data, *Journal of Derivatives*, 1–12.
- Chou, R., Engle, R.F., and Kane, A. (1992) Measuring Risk-Aversion from Excess Returns on a Stock Index, *Journal of Econometrics*, 52, 201–224.
- Clark, P.K. (1973) A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Price, *Econometrica*, 41, 135–156.
- Engle, R. (1982) Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, 50, 987–1008.
- Engle, R. (2002a) Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339–350.

- Engle, R. (2002b) New Frontiers for ARCH, *Journal of Applied Econometrics*, 17, 425–446.
- Engle, R., Ishida, I. (2002) Forecasting Variance of Variance: The Square-Root, the Affine, and the CEV Garch Models, *New York University Working Paper*.
- Engle, R.F. (1983) Estimates of the Variance of U.S. Inflation Based upon the ARCH Model, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 15, 286–301.
- Engle, R.F. (2000) The Econometrics of Ultra-High-Frequency Data, *Econometrica*, 68, January, 1–22.
- Engle, R.F., Ito, T., and Lin, W.L. (1990) Meteor-Showers or Heat Waves – Heteroskedastic Intradaily Volatility in the Foreign-Exchange Market, *Econometrica*, 58, 525–542.
- Engle, R.F., Lilien, D.M., and Robins, R.P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH–M Model, *Econometrica*, 55, March, 391–407.
- Engle, R.F., Ng, V.K., and Rothschild, M. (1990) Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, *Journal of Econometrics*, 45, July–August, 213–237.
- Engle, R.F., Russell, J.R. (1998) Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data, *Econometrica*, 66, September, 1127–1162.
- French, K.R., Schwert, G.W., and Stambaugh, R.F. (1987) Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, 19, 3–29.
- Friedman, M. (1977) Nobel Lecture: Inflation and Unemployment, *Journal of Political Economy*, 85, 451–472.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R., and Runkle, D.E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779–1801.
- Hamao, Y., Masulis, R.W., and Ng, V. (1990) Correlations in Price Changes and Volatility across International Stock Markets, *Review of Financial Studies*, 3, 281–307.
- Harvey, A.C., Ruiz, E., and Shephard, N. (1994) Multivariate Stochastic Variance Models, *Review of Economic Studies*, 61, 247–264.
- Jackwerth, J.C. (2000) Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns, *Review of Financial Studies*, 13, 433–451.
- Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection, *Journal of Finance*.
- Merton, R.C. (1973) Theory of Rational Options Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183.
- Merton, R.C. (1980) On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation, *Journal of Financial Economics*, 8, 323–361.
- Rosenberg, J.V., Engle, R.F. (2002) Empirical Pricing Kernels, *Journal of Financial Economics*, 64, 341–372.
- Sharpe, W. (1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, 19, 425–442.
- Taylor, S.J. (1986) *Modeling Financial Time Series*, John Wiley.
- Taylor, S.J. (1994) Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study, *Mathematical Finance*, 4, 183–204.
- Tobin, J. (1958) Liquidity Preference as Behavior towards Risk, *Review of Economic Studies*, 25, 65–86.
- Zakoian, J.M. (1994) Threshold Heteroskedastic Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931–955.